RA-T0333

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, MARCH-2019
THIRD YEAR
MATHEMATICS (Paper - III)
Linear Algebra & Vector Calculus
(w.e.f. 2010-2011 Admitted Batch)

Time : 3 Hours **Max. Marks : 100**

SECTION - A

Answer ALL questions (4 x 15 = 60)

1. a) i) Prove that a necessary and sufficient condition for a nonempty subset W of V(F) to be a subspace is $a,b \in F$ and $\alpha,\beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

V(F) యొక్క శూన్యేతర ఉపసమితి w ఒక ఉపాంతరాళం కావడానికి

$a,b \in F$ మరియు $\alpha,\beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

ఆవశ్యక-పర్యాప్త నియమం అని నిరూపించండి.

ii) Verify whether the vectors {(2, 0, 5), (3, –5, 8), (4, –2, 1), (0, 0, 1)} are linearly independent in $R^3(R)$.

{(2, 0, 5), (3, –5, 8), (4, –2, 1), (0, 0, 1)}సదిశలు $R^3(R)$ లో ఏకఘాత స్వతంత్రం అవుతాయేమో సరి చూడండి.

OR

b) i) Find the null space, range, rank and nullity of the transformation $T: R^2 \rightarrow R^3$ defined by $T(x,y) = (x+y, x-y, y)$.

Scanned with CamScanner

$T(x,y)=(x+y,x-y,y)$ గా నిర్వచింపబడిన $T:R^2 \to R^3$ యొక్క శూన్యతాంతరాళము, వ్యాప్తి, పరివర్తన కోటి, పరివర్తన శూన్యతలను కనుక్కోండి.

ii) T: U(F) $\to$ V(F) be a linear transformation. If U is finite dimensional then the range space R(T) is a finite dimensional subspace of V(F).

T: U(F) $\to$ V(F) ఒక ఋజు పరివర్తనము. U పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళము అయితే V(F) నకు వ్యాప్త్యంతరాళం R(T) పరిమిత పరిమాణాంతరాళము.

2. a) i) Find the characteristic roots and the corresponding vectors of the matrix

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$ మాత్రిక యొక్క లాక్షణిక మూలాలు మరియు అనురూప లాక్షణిక కనుగొనండి.

Scanned with CamScanner

ii) State and prove Cayley-Hamilton theorem.
కేలీ-హామిల్టన్ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

OR

b) i) Show that in an inner product space V(F), $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ for all $\alpha, \beta \in V$.

V(F) అంతర లబ్ధాంతరాళంలో ప్రతి $\alpha, \beta \in V$ లకు $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ అని చూపండి.

ii) Using Gram-Schmidt orthonormalization process determine the orthonormal basis for vectors $\{(2,0,1),(3,-1,5),(0,4,2)\}$ on $R^3 \to R^3$.
గ్రామ్-ష్మిడ్ అభిలంబీకరణ పద్ధతినుపయోగించి, సదిశలు $\{(2,0,1),(3,-1,5),(0,4,2)\}$ ల నుంచి $R^3 \to R^3$ లో ఒక అభిలంబ ఆధారాన్ని కనుక్కోండి.

3. a) i) Find the area of the surface cut from the cylinder $x^2 + z^2 = a^2$ by the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$.

$x^2 + z^2 = a^2$ అనే స్థూపం నుండి $x^2 + y^2 = a^2$ అనే స్థూపంచే ఖండించబడ్డ ప్రదేశము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

Scanned with CamScanner

ii) Evaluate $\int_C \frac{dx}{x+y}$ where C is the curve $x = at^2, y = 2at,\ 0 \le t \le 2.$

$C: x = at^2, y = 2at,\ 0 \le t \le 2$ అనే వక్రము ద్వారా $\int_C \frac{dx}{x+y}$ ను గణించండి.

OR

b) i) Change of order of integration and hence evaluate $\int_{x=0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$ by changing the order of integration.

పైన ఇచ్చిన ద్విసమాకలని లోని సమాకలన క్రమాన్ని మార్చి దానిని గణన చేయండి.

Scanned with CamScanner

ii) S.T. $\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = -2\pi$ round the circle $x^2 + y^2 = 1$.

$x^2 + y^2 = 1$ వృత్తం వెంబడి $\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = -2\pi$ అని చూపండి.

4. a) i) If $r = e^t(c\cos 2t + d\sin 2t)$ where c and d are constant vectors then show that $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{2dr}{dt} + 5r = 0$.

c, d లు స్థిర సదిశలయి $r = e^t(c\cos 2t + d\sin 2t)$, అయితే $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{2dr}{dt} + 5r = 0$ అని చూపండి.

Scanned with CamScanner

ii) If $a = x + y + z, b = x^2 + y^2 + z^2$,

$c = xy + yz + zx$ then prove that

[grad a grad b grad c] = 0.

$a = x + y + z, b = x^2 + y^2 + z^2, c = xy + yz + zx$;
అయితే [grad a grad b grad c] = 0 అని రుజువు చేయండి.

OR

b) i) State and prove Gauss's Divergence theorem.

గాస్ అపసరణ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

ii) Verify Stoke's theorem for $F = -y^3 i + x^3 j$, where 'S' is the circular disc $x^2 + y^2 \le 1, z = 0$.

$x^2 + y^2 \le 1, z = 0$ వృత్తాకార క్షేత్రం S దృష్ట్యా $F = -y^3 i + x^3 j$ నకు స్టోక్స్ సిద్ధాంతం సరి చూడండి.

Scanned with CamScanner

SECTION - B

Answer any Six questions (6 x 4 = 24)

5. Show that the vectors (1, 3, 2), (1,–7, –8), (2, 1, –1) of $V_3(R)$ is linearly independent.

$V_3(R)$ యొక్క (1, 3, 2), (1,–7, –8), (2, 1, –1) సదిశలు ఋజు పరాధీనమని చూపండి.

6. The mapping $T:V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ is defined by $T(x,y,z)=(x,-y,x-z)$. S.T. 'T' is a linear transformation.

$T:V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ ప్రమేయము $T(x,y,z)=(x,-y,x-z)$గా నిర్వచింపబడింది. 'T' ఋజు పరివర్తనమని చూపండి.

7. Find the rank of the matrix $A=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

పైన ఇవ్వబడిన మాత్రిక A యొక్క కోటిని నిర్ధారించండి.

Scanned with CamScanner

8. Let V be an inner product space over F and $x, y \in V$. Then prove that x, y are linearly dependent if and only if $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$.

క్షేత్రం F పై V ఒక అంతర్లబ్ధాంతరాళం, $x, y \in V$ అనుకొంటే x, y లు ఋజు అస్వతంత్ర సదిశలు కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ అని చూపండి.

9. Evaluate $\int_{y=-1}^{y=0} \int_{x=-1}^{x=1} (x+y+1)\,dxdy$.

$\int_{y=-1}^{y=0} \int_{x=-1}^{x=1} (x+y+1)\,dxdy$ ను గణించండి.

10. If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, test for diagonalizability.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే, A యొక్క వికర్ణీయతను పరిశీలించండి.

Scanned with CamScanner

11. If $f = xy^2 i + 2x^2 yzj - 3yz^2 k$ find div f, curl f at the point (1, –1, 1).

$f = xy^2 i + 2x^2 yzj - 3yz^2 k$ అయిన div f, curl f (1, –1, 1) బిందువు దగ్గర కనుగొనుము.

12. If $F = (2x^2 - 3z)i - 2xy\, j - 4x\, k$ evaluate $\int_V \nabla \times F\, dV$, where V is closed region bounded by $x = 0, y = 0, z = 0$, $2x + 2y + z = 4$.

$F = (2x^2 - 3z)i - 2xy\, j - 4x\, k$ అయి $x = 0, y = 0, z = 0$, $2x + 2y + z = 4$ లచే పరిబద్ధ సంవృతాంతరాళం V అయితే $\int_V \nabla \times F\, dV$ ను రాబట్టండి.

SECTION - C

Answer ALL questions (8 x 2 = 16)

13. Define a vector space.

సదిశాంతరాళం ను నిర్వచించండి.

Scanned with CamScanner

14. Show that the system of vectors (1, 2, 0), (0, 3, 1), (–1, 0, 1) of $V_3(Q)$ is linearly independent, where Q is the field of rational numbers.

V_3 యొక్క (1, 2, 0), (0,3, 1), (–1, 0, 1) సదిశలు అకరణీయ సంఖ్యల క్షేత్రం Q పై ఋజు స్వాతంత్ర్యమని చూపండి.

15. Define linear transformation.

రుజు పరివర్తనను నిర్వచించండి.

16. State parallelogram law.

సమాంతర చతుర్భుజ న్యాయం నిర్వచించండి.

17. If $\alpha = (2,1,1+i)$ is a vector in C^3 with standard inner product find $\|\alpha\|$ and the unit vector of α.

ప్రమాణ అంతర లబ్ధంతో C^3 అంతరాళంలో $\alpha = (2,1,1+i)$ సదిశకు $\|\alpha\|$ కనుగొని α యొక్క యూనిట్ సదిశను పొందండి.

18. Find a unit vector of $\alpha = (3+i, 4i, -4)$.

$\alpha = (3+i, 4i, -4)$ యొక్క యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

Scanned with CamScanner

19. If $A = t^2 i - t\ j + (2t+1)k$ and $B = (2t-3)i + j - tk$ find $(A \times B)'$ at $t = 1$.

$A = t^2 i - t\ j + (2t+1)k$ మరియు $B = (2t-3)i + j - tk$ అయిన $t = 1$ దగ్గర $(A \times B)'$ విలువను కనుగొనుము.

20. Define irrotational curve.

భ్రమణ రహిత్మాక వక్రతను నిర్వచించండి.

Scanned with CamScanner